

CORRIGÉ 1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

La division euclidienne de $n \in \mathbb{N}$ par 4 donne l'existence et l'unicité de $q, r \in \mathbb{N}$ tels que:

$$n = 4q + r \text{ avec } 0 \leq r \leq 3$$

$$q = r = 0 \text{ donne } n = 0$$

$$q = r = 1 \text{ donne } n = 5$$

$$q = r = 2 \text{ donne } n = 10$$

$$q = r = 3 \text{ donne } n = 15$$

CORRIGÉ 2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les divisions euclidiennes de $n \in \mathbb{N}$ par 152 et par 147 donnent l'existence et l'unicité de $q \in \mathbb{N}$ tel que:

$$n = 152q + 13 \text{ (on a bien } 13 < 152) \text{ et } n = 147q + 98 \text{ (on a bien } 98 < 147)$$

Par différence membre à membre, on a:

$$n - n = (152q + 13) - (147q + 98) \text{ soit } 0 = 5q - 85 \text{ soit } q = 17$$

$$\text{On a } 152 \times 17 + 13 = 147 \times 17 + 98 = 2597$$

CORRIGÉ 3 Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $a \sup b$.

$$a - b = 399 \text{ et la division euclidienne de } a \text{ par } b \text{ s'écrit } a = 15b + 21 \text{ (donc } b > 21)$$

$$\text{On a donc } 399 + b = 15b + 21 \text{ c'est-à-dire } 14b = 378 \text{ ou } b = 14, \text{ puis } a = 413$$

CORRIGÉ 4 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \neq 4$.

$$\frac{n+17}{n-4} \in \mathbb{N} \iff n-4 \mid n+17$$

$$\text{Or } n-4 \mid n-4 \text{ donc } n-4 \mid n+17 \implies n-4 \mid (n+17) - (n-4)$$

$$\implies n-4 \mid 21$$

$$\implies n-4 \in \{-21; -7; -3; -1; 1; 3; 7; 21\}$$

$$\implies n \in \{-17; -3; 1; 3; 5; 11; 25\}$$

$$\implies n \in \{1; 3; 5; 7; 11; 25\} \text{ car } n \in \mathbb{N}$$

On doit vérifier que chacun de ces entiers sont bien des solutions du problème initial, car on a raisonné par implications et non par équivalences.

CORRIGÉ 5 Soit $x, y \in \mathbb{Z}$.

$$x^2 - 8xy = 17 \iff (-x)^2 - 8(-x)(-y) = 17, \text{ ce qui montre que } (x; y) \text{ solution } \iff (-x; -y) \text{ solution}$$

On peut donc chercher les couples $(x; y)$ solutions tels que $x \geq 0$ OU $y \geq 0$ (mais pas $x \geq 0$ ET $y \geq 0$ car on raterait les couples $(x; y)$ de signes contraires)

$$\text{On a } x^2 - 8xy = 17 \iff x(x - 8y) = 17$$

En cherchant les solutions $(x; y)$ dans \mathbb{Z} avec $y \in \mathbb{N}$, on a alors $y \geq 0$ donc $x \geq x - 8y$.

$$\text{Donc } x(x - 8y) = 17 \implies (x - 8y = 1 \text{ et } x = 17) \text{ OU } (x - 8y = -17 \text{ et } x = -1)$$

On vérifie que $(17; 2)$ et $(-1; 2)$ sont des solutions, et que ces couples vérifient bien $y \in \mathbb{N}$:

$$y = 2 \in \mathbb{N} \text{ et } 17^2 - 8 \times 17 \times 2 = 17(17 - 8 \times 2) = 17 \times 1 = 17$$

$$y = 2 \in \mathbb{N} \text{ et } (-1)^2 - 8 \times (-1) \times 2 = 1 + 16 = 17.$$

On peut donc trouver toutes solutions dans \mathbb{Z} en revenant à la remarque $(x; y) \text{ solution } \iff (-x; -y) \text{ solution}$

Finalement, il y a quatre couples solutions: $(17; 2), (-1; 2), (-17; -2), (1; -2)$

CORRIGÉ 6 Montrons par récurrence que la propriété $P(n): \ll 3 \mid 2^{3n} - 5^n \gg$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation: $2^0 - 5^0 = 0$ est un multiple de 3 donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie.

$$3 \mid 2^{3n} - 5^n \text{ par hypothèse de récurrence, donc } 3 \mid 5 \times (2^{3n} - 5^n)$$

$$\text{Or } 3 \mid 3 \times 2^{3n}.$$

$$\text{Donc } 3 \mid 5 \times (2^{3n} - 5^n) + 3 \times 2^{3n}, \text{ c'est-à-dire } 3 \mid 8 \times 2^{3n} - 5 \times 5^n \text{ ou encore } 3 \mid 2^{3(n+1)} - 5^{n+1}.$$

$$\text{On a ainsi montré } P(n) \implies P(n+1).$$

Conclusion: $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire (c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \implies P(n+1)$), donc, par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.