

CORRIGÉ 1 Les divisions euclidiennes successives dans l'algorithme d'Euclide sont les suivantes:

$$777 = 441 \times 1 + 336$$

$$441 = 336 \times 1 + 105$$

$$336 = 105 \times 3 + 21$$

$$105 = 21 \times 5$$

$$\text{Donc PGCD}(441 ; 777) = 21$$

CORRIGÉ 2① Un système de congruences vérifié par n est:

$$\begin{cases} n \equiv 13 [19] \\ n \equiv 6 [12] \end{cases}$$

② On désigne par $(u ; v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $19u - 12v = -7$ (E_1).

a) $\text{pgcd}(19; 12) = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, l'équation $19u - 12v = 1$ admet au moins un couple solution $(u_0; v_0)$.

$19u - 12v = -7$ admet donc au moins comme solution le couple $-7u_0; -7v_0$

b) Recherchons d'une solution particulière de (E_2) : $19u - 12v = 1$ par l'algorithme d'Euclide étendu.

$$19 = 12 \times 1 + 7 \text{ donc } 7 = 19 - 12$$

$$12 = 7 \times 1 + 5 \text{ donc } 5 = 12 - 7 = -19 + 2 \times 12$$

$$7 = 5 \times 1 + 2 \text{ donc } 2 = 7 - 5 = 2 \times 19 - 3 \times 12$$

$$5 = 2 \times 2 + 1 \text{ donc } 1 = 5 - 2 \times 2 = -5 \times 19 + 8 \times 12$$

$(-5; -8)$ est donc une solution particulière de (E_2)

$(35; 56)$ est donc une solution particulière de (E_1)

c) Soit $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$.

$$19u - 12v = -7 \iff 19u - 12v = 19 \times 35 - 56 \times 12 \iff 19(u - 35) = 12(v - 56) : (E_3)$$

On en déduit: $19 \mid 12(v - 56)$. Or, $\text{pgcd}(19; 12) = 1$, donc par le théorème de Gauss, on en déduit que $19 \mid (v - 56)$.

Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $v - 56 = 19k$.

Puis (E_3) donne $u - 35 = 12k$.

Vérifions que tous les couples trouvés sont bien des solutions de (E_1).

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Posons $u = 12k + 35$ et $v = 19k + 56$.

$$19u - 12v = 19(12k + 35) - 12(19k + 56) = 19 \times 35 - 12 \times 56 = -7$$

L'ensemble des solutions est $\{(12k + 35; 19k + 56), k \in \mathbb{Z}\}$.

③ Soit n le nombre d'années avant une conjonction des deux comètes.

n vérifie le système de congruence de la question ①, c'est-à-dire

Il existe $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = 13 + 19u$ et $n = 6 + 12v$.

On en déduit $13 + 19u = 6 + 12v$ c'est-à-dire $(u; v)$ solution de (E_1), ou encore:

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 13 + 19(12k + 35) = 6 + 12(19k + 56)$.

Le plus petit entier naturel n est obtenu pour $k = -2$, et donc la prochaine conjonction de comètes a lieu dans $n = 13 + 19(12 \times (-2) + 35) = 222$ ans.

Et la suivante dans $222 + 12 \times 19 = 450$ ans.

CORRIGÉ 3 On note n un naturel non nul, $a = 3n + 1$ et $b = 5n - 1$.

① $5a - 3b = 5(3n + 1) - 3(5n - 1) = 8$

Donc 8 est une combinaison linéaire de a et de b , donc $8 \mid \text{PGCD}(a; b)$

② $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(a, b - a) = \text{PGCD}(3n + 1; 2n - 2) = \text{PGCD}(2n - 2; 3n + 1 - (2n - 2)) = \text{PGCD}(2n - 2; n + 3) = \text{PGCD}(n + 3; n - 5) = \text{PGCD}(n - 5; 8)$

$$\text{PGCD}(n - 5; 8) = 8 \iff 8 \mid (n - 5) \iff n \equiv 5[8]$$