

CORRIGÉ 1

On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

① $f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

② On résout dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$:

$$f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0; \Delta = 4 - 16 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées: $-1 + i\sqrt{3}$ que l'on connaît déjà par la question précédente et $-1 - i\sqrt{3}$

③ Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

$$f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$$

Pour que l'équation $f(z) = \lambda$ admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme $z^2 + 2z + 9 - \lambda$ soit strictement négatif.

$$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32; \Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle $] -\infty; 8[$.

④ Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

$$\begin{aligned} a) f(z) &= z^2 + 2z + 9 = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 \\ &= x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y) \end{aligned}$$

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

$$f(z) \text{ réel} \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x + 1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = -1$$

Donc (E) est la réunion de deux droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.

CORRIGÉ 2

① Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} ix \text{ est solution de } (E) &\iff (ix)^3 + (-8 + i)(ix)^2 + (17 - 8i)(ix) + 17i = 0 \\ &\iff -ix^3 - (-8 + i)x^2 + 17ix + 8x + 17i = 0 \iff 8x^2 + 8x = 0 \text{ et } -x^3 - x^2 + 17x + 17 = 0 \end{aligned}$$

Les seules solutions de $8x(x+1) = 0$ sont 0 et -1; et on vérifie simplement que -1 est solution de l'équation compliquée de degré 3.

Finalement (E) admet $-i$ comme unique solution parmi les imaginaires purs.

② $-i$ étant racine du polynôme $P(z) = z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i$, celui est factorisable $(z + i)$, c'est-à-dire qu'il existe trois **complexes** a , b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a:

$$P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

On doit faire confiance à l'énoncé et chercher les nombres a , b et c parmi les nombres réels.

En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ ai + b &= -8 + i \\ bi + c &= 17 - 8i \\ ic &= 17i \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -8 \\ c &= 17 \end{cases}$$

On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(z^2 - 8z + 17)$.

③ Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z \text{ est solution de } (E) \iff (z + i)(z^2 - 8z + 17) = 0 \iff \begin{cases} z + i &= 0 \\ \text{ou} & \\ z^2 - 8z + 17 &= 0 \end{cases}$$

Le déterminant du trinôme étant $\Delta = -4$, les solutions cherchées sont: $S = \{-i; 4 + i; 4 - i\}$

CORRIGÉ 3① Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\frac{z-2}{z-1} = z \iff z-2 = z(z-1) \iff z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$; il admet donc deux racines conjuguées $1+i$ et $1-i$

② Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$2z + \bar{z} = 9 + i \iff 2(x + iy) + (x - iy) = 9 + i \iff 2x + x = 9 \text{ et } 2y - y = 1.$$

L'équation admet $3+i$ pour unique solution.

CORRIGÉ 4 Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$4z^2 - 5z + 3 = 4 \left(z^2 - \frac{5}{4}z \right) + 3 = 4 \left(\left(z - \frac{5}{8} \right)^2 - \frac{25}{64} \right) + 3 = 4 \left(z - \frac{5}{8} \right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{3 \times 16}{16} = 4 \left(z - \frac{5}{8} \right)^2 + \frac{13}{16}$$

La forme canonique précédente permet de factoriser :

$$2z^2 - 4z + 3 = \left(2 \left(z - \frac{5}{8} \right)^2 - \left(i \frac{\sqrt{13}}{4} \right)^2 \right) = \left(2 \left(z - \frac{5}{8} \right) - \left(i \frac{\sqrt{13}}{4} \right) \right) \left(2 \left(z - \frac{5}{8} \right) + \left(i \frac{\sqrt{13}}{4} \right) \right)$$

$$2z^2 - 4z + 3 = \left(2z - \frac{5+i\sqrt{13}}{4} \right) \left(2z - \frac{5-i\sqrt{13}}{4} \right)$$