

Exercice 1

1. On a d'après l'énoncé, pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0)$

donc $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$ soit encore $u_1 = \frac{2}{1 + \frac{2}{2}}$, d'où $u_1 = \frac{2}{5/2}$ et enfin : $\boxed{u_1 = \frac{4}{5}}$.

2. a. • $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq 2$, donc : $\underline{\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2}$

• Soit p un entier naturel fixé mais quelconque, on suppose que : $\frac{1}{2} \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 2$.

f étant croissante sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$, on en déduit que : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(2)$.

Or on a vu en 1) que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et on a $f(2) = \frac{8}{7}$, donc : $\frac{4}{5} \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq \frac{8}{7}$.

Or $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ et $\frac{8}{7} < 2$; on a donc finalement : $\frac{1}{2} \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 2$.

• Conclusion : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ et pour tout entier naturel p , si $\frac{1}{2} \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 2$, alors : $\frac{1}{2} \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 2$.

D'après le principe de récurrence, on a donc : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2}$.

- b. D'après la question précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$ donc (u_n) est majorée par 2.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit qu'elle est convergente.

D'après les inégalités précédentes, sa limite ℓ vérifie : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 2$.

- c. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = f(u_n)$ et (u_n) converge vers ℓ tel que : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 2$.

D'autre part, la fonction f est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur son ensemble de définition, donc f est continue en ℓ .

Par théorème, on en déduit que : $\ell = f(\ell)$.

$$\begin{aligned} \text{Or : } \ell = f(\ell) &\iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \\ &\iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \\ &\iff \ell(1+3\ell-4) = 0 \\ &\iff 3\ell(\ell-1) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1 \end{aligned}$$

Comme $\ell = f(\ell)$ et $\ell \geq \frac{1}{2}$, on en déduit que : $\ell = 1$.

La suite (u_n) converge donc vers 1.

3. a.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 - u >= E
        u = 4 * u / (1 + 3 * u)
        n = n + 1
    return n
```

- b. On obtient $u_6 \approx 0,999756$ et $u_7 \approx 0,999\ 939$, donc $1 - u_6 > 10^{-4}$ et $1 - u_7 < 10^{-4}$.
Le programme renvoie $n = 7$.

4. a. Soit n un entier naturel, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ par définition de (v_n)

$$\begin{aligned} \text{D'où : } v_{n+1} &= \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}} \\ &= \frac{4u_n}{1+3u_n - 4u_n} \\ &= \frac{4u_n}{1 - u_n} \\ &= 4 \times \frac{u_n}{1 - u_n} \\ &= 4v_n. \end{aligned}$$

On a donc pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 4v_n$.

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{1 - u_0}$, c'est-à-dire

$$v_0 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ soit } v_0 = 1.$$

On en déduit alors que : pour tout entier naturel n , $v_n = 1 \times 4^n$, i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4^n}$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$ donc $v_n(1 - u_n) = u_n$ et par suite : $v_n - u_n v_n = u_n$.

D'où : $v_n = u_n v_n + u_n$, c'est-à-dire : $v_n = u_n(v_n + 1)$.

Comme $v_n = 4^n$, alors : $v_n \geq 1$, et par suite : $v_n + 1 \geq 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$.

On en déduit alors que : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}}$.

- c. Soit n un entier naturel, on sait que : $v_n = 4^n$, d'où par 4b) : $\boxed{u_n = \frac{4^n}{4^n + 1}}$.

On a donc pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{4^n \times 1}{4^n \times (1 + (\frac{1}{4})^n)}$, soit encore : $u_n = \frac{1}{1 + (\frac{1}{4})^n}$.

Or : $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, d'où par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$ puis par

quotient : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$.

Exercice 2

1. B

Pour $t = -2$, on trouve les coordonnées de B.

2. B

Le vecteur \overrightarrow{AB} admet pour coordonnées : $(2 - 1 ; 1 - 0 ; 0 - 2)$ soit $(1 ; 1 ; -2)$.

$B \in (AB)$ et la droite (AB) admet $-\overrightarrow{AB}$ pour vecteur directeur.

3. C

Δ admet comme vecteur directeur \vec{u} , de coordonnées : $(2 ; 1 ; -1)$ (d'après la représentation paramétrique de Δ donnée dans l'énoncé).

Le vecteur \overrightarrow{AB} admet pour coordonnées : $(1 ; 1 ; -2)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc (AB) et Δ sont soit sécantes, soit non coplanaires.

D'après l'énoncé, une représentation paramétrique de Δ est :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

D'après la question 2), une représentation paramétrique de (AB) est :
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$M(x ; y ; z) \in (AB) \cap \Delta \iff$ il existe t et k réels tels que :
$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 - k \\ z = 2k \\ x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}.$$

Soient t et k deux réels,
$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - k \\ -2 + t = 1 - k \\ 4 - t = 2k \end{cases} \iff \begin{cases} t = 3 - k \\ 1 + 6 - 2k = 2 - k \\ 4 - 3 + k = 2k \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} t = 3 - k \\ k = -5 \\ k = 1 \end{cases}$$

On en déduit que les droites (AB) et Δ ne sont pas sécantes. Elles sont donc non coplanaires.

4. A

$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, donc par la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AC}$$

Et donc : $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur \overrightarrow{AD} est une combinaison linéaire des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , ces trois vecteurs sont donc coplanaires.

Exercice 3

Partie 1

- D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
 - la fonction f' est positive sur $] -\infty ; -1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
 - la fonction f' est négative sur $] -1 ; +\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.
- D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
 - la fonction f' est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
 - la fonction f' est croissante sur $] 0 ; +\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

- Soit x un réel, $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$ d'où : $f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$.

Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composée : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$.

On en déduit, par somme, que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

La courbe \mathcal{C} admet donc la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.

- $x \mapsto -x$ est dérivable sur \mathbb{R} , donc par théorème, $x \mapsto e^{-x}$ aussi, donc f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-1)e^{-x} \\ &= (1-x-2)e^{-x} \\ &= (-x-1)e^{-x}. \end{aligned}$$

- Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.

Or : $-x-1=0 \iff x=-1$ et $-x-1>0 \iff x<-1$.

$$f(-1) = (-1+2)e^1 = e$$

D'où le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	e	0

- Sur l'intervalle $[-2 ; -1]$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et elle y est strictement croissante.

$$f(-2) = 0 ; \quad f(-1) = e \quad \text{et} \quad 0 < 2 < e$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-2 ; -1]$.

- On a déjà vu que $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

$x \mapsto -x-1$ est aussi dérivable sur \mathbb{R} , donc par produit, f' aussi. Et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times (-1)e^{-x} \\ &= (-1+x+1)e^{-x} \\ &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de x .

- Sur $] -\infty ; 0[$, $f'' < 0$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
- Sur $]0 ; +\infty[$, $f'' > 0$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de \mathcal{C} est un (/le) point d'inflexion de cette courbe.

Exercice 4

Partie I

1. • En $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty, \text{ d'où par composée : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et donc par somme : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$.

- En $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0; \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. $x \mapsto x$ est dérivable sur \mathbb{R} , $x \mapsto -2x$ est dérivable sur \mathbb{R} donc par théorème $x \mapsto e^{-2x}$ aussi et donc f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - (-2)e^{-2x} \\ &= 1 + 2e^{-2x}. \end{aligned}$$

On sait que pour tout réel x , $e^{-2x} > 0$, donc pour tout réel x , $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. f est continue sur \mathbb{R} (car dérivable sur cet intervalle) et strictement croissante sur \mathbb{R} d'après la question précédente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et } 0 \in \mathbb{R}$$

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$$f(0) = -1 \text{ et } f(1) \approx 0,865, \text{ donc } 0 < \alpha < 1;$$

$$f(0,4) \approx -0,05 \text{ et } f(0,5) \approx 0,13, \text{ donc } 0,4 < \alpha < 0,5;$$

$$f(0,42) \approx -0,01 \text{ et } f(0,43) \approx 0,007, \text{ donc } 0,42 < \alpha < 0,43.$$

4. On a donc :

- sur $] -\infty ; \alpha[$, $f < 0$;
- sur $] \alpha ; +\infty[$, $f > 0$;
- et $f(\alpha) = 0$.

Partie II

1. a. Pour tout réel t , posons : $u(t) = t^2 + e^{-2t}$.

Soit t un réel, $e^{-2t} > 0$ donc $u(t) > 0$.

On a déjà vu dans la partie précédente que $t \mapsto e^{-2t}$ est dérivable sur \mathbb{R} donc u est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux telles fonctions. De plus, u est strictement positive sur \mathbb{R} par ce qui précède.

Par théorème, h est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} \\ &= \frac{2t - 2e^{-2t}}{2\sqrt{t^2 + e^{-2t}}} \end{aligned}$$

$$h'(t) = \frac{t - e^{-2t}}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}$$

$$= \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

- b.** Le dénominateur étant strictement positif, le signe de $h'(t)$ est celui du numérateur, c'est-à-dire celui de $f(t)$ dont on a donné le signe dans la partie I.

D'où :

- sur $] -\infty ; \alpha[$, $f < 0$ donc $h' < 0$: la fonction h est strictement décroissante sur cet intervalle ;
- sur $] \alpha ; +\infty[$, $f > 0$ donc $h' > 0$: la fonction h est strictement croissante sur cet intervalle ;
- et $f(\alpha) = 0$, donc $h(\alpha)$ est le minimum de la fonction h sur \mathbb{R} .

La distance OM est donc minimale pour $t = \alpha$ et l'ordonnée de M est alors $e^{-\alpha}$.

Le point de la courbe le plus proche de l'origine est donc le point $A(\alpha ; e^{-\alpha})$.

α est l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Il suffit de tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point, elle coupe \mathcal{C} au point A

- 2. a.** Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse α est $g'(\alpha)$ soit $-e^{-\alpha}$
- b.** D'après le rappel, le produit des coefficients directeurs est $-e^{-\alpha} \times \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$, c'est-à-dire $-\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}$.

Or on sait que $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) = 0 \iff \alpha - e^{-2\alpha} = 0$

$$\iff \alpha = e^{-2\alpha}$$

$$\iff \frac{e^{-2\alpha}}{\alpha} = 1$$

$$\iff -\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha} = -1$$

Donc le produit des coefficients directeurs est égal à -1 .

La droite (OA) et la tangente T sont donc perpendiculaires.

Voir le graphique.

Annexe

Exercice 3

