

CORRIGÉ 1 COURS

CORRIGÉ 2 ① (analyse : pas de E.I.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \text{ et par inverse, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\text{Par différence des deux limites précédentes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

② (analyse : E.I. du type $\infty - \infty$, donc factorisation par le monôme dominant)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 5n^4 - 3n^3 = n^4 \left(5 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - \frac{1}{n} = 5$$

$$\text{Par produit des deux limites précédentes, } n^4 \left(5 - \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

③ (analyse : E.I. du type $\frac{\infty}{\infty}$, donc factorisation par le monôme dominant)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{4n^3 + 27n^2 + 7}{0,1n^5 - 4} = \frac{n^3 \left(4 + \frac{27}{n^2} + \frac{7}{n^4} \right)}{n^5 \left(0,1 - \frac{4}{n^5} \right)} = \frac{1}{n^2} \frac{4 + \frac{27}{n^2} + \frac{7}{n^4}}{0,1 - \frac{4}{n^5}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{27}{n^2} + \frac{7}{n^4} = 4 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 - \frac{4}{n^5} = 0,1$$

$$\text{Par produit et quotient des limites précédentes, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \frac{4 + \frac{27}{n^2} + \frac{7}{n^4}}{0,1 - \frac{4}{n^5}} = 0$$

④ (analyse : un facteur est une E.I. mais pas le produit)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 6n^3 - 5n = n^3 \left(6 - \frac{5}{n^2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(6 - \frac{5}{n^2} \right) = +\infty \text{ par produit}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} - 7 = -7 \text{ par somme}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(6 - \frac{5}{n^2} \right) \left(\frac{3}{n} - 7 \right) = -\infty \text{ par produit des deux précédentes limites.}$$

CORRIGÉ 3 ① $v_1 = 1 \times u_1 - 1 = \frac{1}{2} = 0,5$.

$$\text{② Pour tout entier } n \geq 1, v_{n+1} = nu_{n+1} - 1 = (n+1) \times \frac{n \times u_n + 1}{2(n+1)} - 1 = \frac{n \times u_n + 1}{2} - \frac{2}{2} = \frac{n \times u_n - 1}{2} = \frac{1}{2} v_n.$$

$$\text{Cette relation montre que la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$\text{③ On a donc pour tout entier } n \geq 1, v_n = v_0 q^n = 0,5 \times 0,5^{n-1} = 0,5^n.$$

$$\text{Or } v_n = nu_n - 1 \iff u_n = \frac{v_n + 1}{n} = \frac{1 + 0,5^n}{n}.$$

$$\text{④ Comme } -1 < 0,5 < 1, \text{ on sait que } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0, \text{ et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ on a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

⑤ Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + (0,5)^{n+1}}{n+1} - \frac{1 + (0,5)^n}{n} = \frac{n + n \times 0,5^{n+1} - (n+1) - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \\ &= \frac{-1 + 0,5n \times 0,5^n - (n+1) \times 0,5^n}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(0,5n - n - 1)}{n(n+1)} = \frac{-1 + 0,5^n(-0,5n - 1)}{n(n+1)} = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Les deux termes du quotient sont supérieurs à zéro, donc pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n < 0, \text{ ce qui démontre que la suite } (u_n) \text{ est décroissante (vers zéro).}$$

CORRIGÉ 4 ① Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $w_n > 0$ ».

Initialisation : $w_0 = 1 > 0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$w_n > 0$ par hypothèse de récurrence, donc $w_n + 1 > 0$ et donc, par quotient de deux nombres strictement positifs, $w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n + 1} > 0$.

On a montré $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ (pour l'entier n arbitraire choisi, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ (hérédité), donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{w_n + 1}$. Or $w_n + 1 > 1$ donc $0 < \frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$.

La suite (w_n) étant à termes positifs, on peut en déduire que la suite est strictement décroissante (ne pas oublier de dire que la suite est à termes strictement positifs, sinon le critère ne fonctionne pas comme le montre l'exemple de la suite dont le terme général est $-\frac{1}{2^n}$, qui est une suite croissante).

② $w_0 = 1, w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{4}$ et $w_4 = \frac{1}{5}$

③ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $w_n = \frac{1}{n+1}$ ».

Initialisation : $w_0 = \frac{1}{0+1}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$w_{n+1} = \frac{w_n}{w_n + 1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + 1}$ par hypothèse de récurrence.

Donc $w_{n+1} = \frac{1}{n+1} \div \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$.

Donc $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ (hérédité), donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.